初等矩阵与变换

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 11 月 3 日

主要内容

等价关系

上次定义了三个等价关系: $\overset{r}{\sim}$, $\overset{c}{\sim}$, $\sim$. 下面进一步描述这些等价关系.

定理

假设 $A, B \in M_{m\times n}$, 则

i. $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow \exists m$ 阶可逆矩阵 P 使得 $PA = B$.
ii. $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow \exists n$ 阶可逆矩阵 Q 使得 $AQ = B$.
iii. $A \sim B \Longleftrightarrow \exists m$ 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $PAQ = B$.

为了证明定理, 通过**初等矩阵**描述初等矩阵变换.

初等矩阵

定义

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

i

$$E(i,j)=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或}c_i\leftrightarrow c_j]{r_i\leftrightarrow r_j} E$$

ii $E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或} c_i \times k]{r_i \times k} E$

iii $E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{或} c_j + kc_i]{r_i + kr_j} E$

初等变换与初等矩阵

命题

初等行变换等同于左乘初等矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$; 初等列变换等同于右乘 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$.

初等变换与初等矩阵

命题

初等行变换等同于左乘初等矩阵 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$; 初等列变换等同于右乘 $E(i,j), E(i(k)), E(ij(k))$.

初等矩阵均可逆, 且逆矩阵是一类型的初等矩阵: $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$, $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$, $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$.

命题

方阵 A 可逆当且仅当初等矩阵 $P_1, \ldots, P_l$ 使得 $A = P_1 \cdots P_l$.

证明.

$(\Longleftarrow)$ P_i 可逆.
$(\Longrightarrow)$ 通过初等行变换将 A 化成行最简形 B, $B = E$. □

定理的证明

证明.

只证 (i), 其余类似.

- ($\Longrightarrow$) $\exists$ 初等矩阵 $P_1, \ldots, P_l$ 使得 $(P_1 \cdots P_l)A = B$. 只需令 $P = P_1 \cdots P_l$.
- ($\Longleftarrow$) 将 P 写成初等矩阵相乘的形式: $P = P_1 \cdots P_l$, 则 $P_1 \cdots P_l A = B$. (每左乘一次 P_i 都是进行一次初等行变换.)

$\square$

推论

方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Longleftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Longleftrightarrow A \sim E$.

初等矩阵的应用

问题

若已知有一系列初等变换将 A 变成 B, 定理告诉我们有可逆矩阵 P 使得 $PA = B$. 如何求 P?

策略利用增广矩阵 (A, E):

$$PA = B \Longleftrightarrow P(A, E) = (PA, PE) = (B, P),$$

增广矩阵的右半部分记录下行操作.

例子

将 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 化成行最简形矩阵 F. 求一个可逆矩阵 P 使得 $PA = F$.

解

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+10r_2]{r_2\div(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right).$$

评述

可继续, 如 $r_2 + kr_3$ 不改变 F, 但 P 改变, P 不唯一.

判定, 求逆矩阵

这个方法还可以被用来判定方阵 A 是否可逆. 若可逆, 求逆. 步骤如下:

1. 取增广矩阵 (A, E)(分块矩阵);
2. 通过初等行变换将 A 化成行阶梯形矩阵; 如果首非零元在对角线上, 则 A 可逆;
3. 若 A 可逆 (依据推论,) 可进一步通过初等行变换将 A 化成 E: $P(A, E) = (E, P)$;
4. $A^{-1} = P$.

例子

$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. A 可逆? 若可逆, 求 A^{-1}.

解

$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-9r_2]{r_2\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times 2]{r_1-3r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{r_2+\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

所以 A 与 E 等价, 则可逆. 而且, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$(唯一确定). □

解线性方程组

因此, 这也可以被用到解方程组上. 假设有矩阵方程

$$AX = B,$$

若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$.
注意, X 不一定只有一列.
利用增广矩阵 (A, B) 寻找 P 使得 $PA = E$, 则

$$P(A, B) = (PA, PB) = (E, PB) = (E, A^{-1}B).$$

参看课本例题.

例子

解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

例子

解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 则有 $Ax = b$.

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - 5r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 + 2r_3 \\ r_2 + r_3}]{r_3 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

所以 $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 是解.